Exercice 1

1. **Écrire les propositions en utilisant les quantificateurs :**
   - P : Le carré d'un réel est positif.
   - Q : Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
   - R : Il existe au moins un $a \in \mathbb{R}$, pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ on a $x \geq a$.
   - T : Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un seul élément $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x \geq p$.
2. **Donner la négation de chacune des propositions suivantes :**

   a. $(\forall x \in \mathbb{R}) : x - 1 < x^2$; b. $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2+10} \notin \mathbb{N}$; c. $(\exists x \in \mathbb{Z}) : 6x^2 - x - 2 = 0$

Exercice 2

1. **soit la proposition** P **:** $(\forall y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{2x}{x^2+1} > y$.
   Donner la Négation $\bar{P}$ et sa valeur de vérité , puis deduire la valeur de verite de P

2. **Soit la proposition** Q **:** $(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.
   Donner la Négation $\bar{Q}$ et sa valeur de vérité , puis deduire la valeur de verite de P

Exercice 3 (Raisonnement par contraposée)

Montrer que :

1. $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) : \left(x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1\right)$.
2. $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) : (x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2)$.

Exercice 4 (Raisonnement par équivalence)

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \left(\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1\right)$.
2. **a.** Montrer que : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2); x^2 + y^2 \geq 2xy$.
   b. En déduire que : $(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3); x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
3. **a.** Montrer que : $(\forall a \geq 0)(\forall b \geq 0); a + b \geq 2\sqrt{ab}$.
   b. En déduire que : $(\forall a \geq 0)(\forall b \geq 0)(\forall c \geq 0); (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.
4. Montrer que : $(\forall (a,b) \in]-1,1[^2); -1 < \frac{a+b}{ab+1} < 1$.

Exercice 5 (Raisonnement par l'absurde)

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{4n+3} \notin \mathbb{N}$.
2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \frac{x}{|x|+1} \neq 2$.

Exercice 6 (Disjonction des cas)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 - |x-3| - 4 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - x - 3 = |x|$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2x^2+1} \geq x + 1$.
4. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2+1} - x \geq 0$.
5. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall b \in \mathbb{R}^*); a^2 - ab + b^2 \neq 0$.

Exercice 7 (Récurrence)

1. $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4^{2n+2} - 1$ est un multiple de 15.
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; 11 divise $3^{2n} + 2^{6n-5}$
4. $(\forall n \geq 4)$; $2^n \geq n^2$.
5. $(\forall n \in \mathbb{N})$; $5^n \geq 1 + 4n$.
6. $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + \ldots + 6^n = \frac{6^{n+1}-1}{5}$.
7. $(\forall n \in \mathbb{N})$; $21^n - 2^{2n}$ est divisible par 19.