Exercice 1

(construire, égalités et sommes de vecteurs)

1) Soit A, B, C, D et E des points du plan.
Simplifier $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA}$.
2) Soit A, B, C et D quatre points du plan.

a) Construire M et N tels que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MN}$.

3) Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AO}$.

Exercice 2

(propriétés des vecteurs)
Soit ABC un triangle, M, N et P les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$$

1) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{NP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.
2) En déduire que $\overrightarrow{NP} = \alpha\overrightarrow{MN}$ tel que α est un nombre que l'on déterminera.

Exercice 3

(colinéarité de vecteurs) ABC un triangle. On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{7}{4}\overrightarrow{AC}.$$

1. Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 4

(parallélisme de droites) Soit ABC un triangle, I et J les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}.$$

1. Exprimer $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que $(IC) \parallel (BJ)$.

Exercice 5

(alignement de points) Soit $ABCD$ un parallélogramme, P et Q les points tels que :

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AD}.$$

1. Exprimer $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire que les points C, P et Q sont alignés.

Exercice 6

(détermination vectorielle du milieu d'un segment) ABC un triangle.

1. Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que C est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construire E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Construire F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FE} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. En déduire que les points C, E et F sont alignés.

Exercice 8

Soit ABC un triangle, on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
On considère les points M, N et P tels que :

$$\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{u}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{4}\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{4}\overrightarrow{u} - \frac{1}{4}\overrightarrow{v}$.
2. a) Exprimer $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CP}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   b) Montrer que $(BN) \parallel (CP)$.
3. Soit I le milieu de $[BN]$ et K le milieu de $[CP]$.
   a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   b) En déduire que les points A, I et K sont alignés.
4. Soit E le point tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{BC}$, montrer que $E \in (IK)$.