Exercice 1

1. Donner la négation de chacune des propositions suivantes:
   - $P_1 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$; $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R})\ -1 \leq \cos x \leq 1$
   - $P_3 : n$ premier $\Rightarrow n = 2$ ou n impair ; $P_4 : (\exists n \in \mathbb{N})\, 2n + 1$ pair
2. En utilisant le raisonnement par équivalences successives montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1} \geq x^2 + 1$$

3. En utilisant le raisonnement par la contraposée montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : (x \neq y \text{ et } x \cdot y \neq 2) \Rightarrow \left(\frac{x^2 + 2}{x} \neq \frac{y^2 + 2}{y}\right)$$

4. En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que les propositions suivantes sont vraies :
   (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\quad 1 + 11^1 + 11^2 + \cdots + 11^n = \frac{1}{10}(11^{n+1} - 1)$
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 7^n - 1$ est divisible par 6
5. En utilisant le raisonnement par l'absurde montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x} \neq \frac{x + 2}{\sqrt{x + 4}}$$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^2 + |x^2 + x| + 8x - 5 = 0$$

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{x + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{27}x^3$$

Soient (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Déterminer D_f, et donner le tableau de variation de f.
   (b) Construire (C_f).
   (c) Déterminer graphiquement : $f([-1; 0])$.
2. (a) Vérifier que $f(3) = g(3)$.
   (b) Donner le tableau de variation de g.
   (c) Construire dans le même repère (C_g).
3. Soit h une fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{2}{27}\sqrt{x + 1}^3$$

   (a) Vérifier que $h(x) = g \circ f(x)$.
   (b) Déduire la monotonie de la fonction h sur $[-1; +\infty[$.

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 8}$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 4x + 8 > 0$.
2. Montrer que f est minorée par $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Est-ce que $\frac{1}{2}$ est une valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

1. Déterminer le signe de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$
2. Déterminer le signe de $g(x)$ dans $\mathbb{R}$
3. Résoudre graphiquement les équations :
   $f(x) = 4 \quad ; \quad f(x) = g(x)$
4. Résoudre graphiquement les inéquations :
   $g(x) \leq 8 \quad ; \quad f(x) > g(x)$